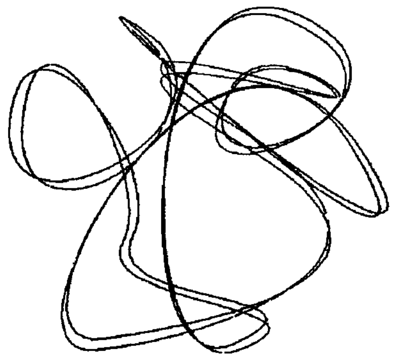
Bézier-Kurven in der Schule

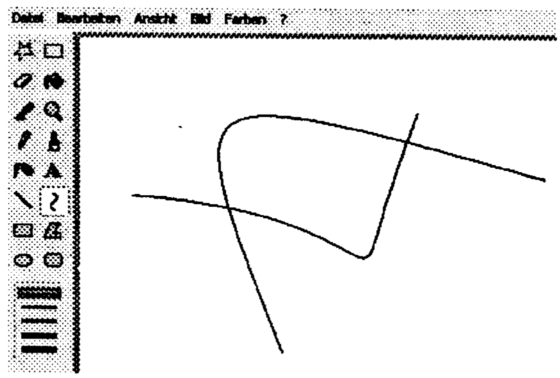
Franz Schlöglhofer
Universität Linz, Pädagogische Akademie des Bundes Linz

Einführung

Bézier-Kurven sind parametrische Kurven mit einem breiten Anwendungsbereich. Die folgenden Beispiele stammen aus einem Bereich der Computergrafik, mit dem wir im „Alltag" viel zu tun haben.

Das linke Bild zeigt einen Bildschirmschoner, der den Namen „Béziers" trägt. Im mittleren Bild werden gekrümmte Linien im Programm „Paint" gezeigt. Solche Linien werden in vielen Grafikprogrammen mit Hilfe von Bézier-Kurven erzeugt. Im rechten Bild wird ein Problem der Zeichendarstellung am Computer thematisiert. Wenn man ein Zeichen einfach grafisch vergrößert, dann sieht man die einzelnen Pixel (unterstes „B") und das Aussehen des Buchstaben ist unbefriedigend. Besser ist es, das Zeichen bei Vergrößerung neu zu berechnen, sodass Form und Aussehen erhalten bleiben. Dafür eignen sich Bézier-Kurven sehr gut.





Historisch bekamen parametrische Kurven im Zusammenhang mit der Computerentwicklung größere Bedeutung im industriellen Design. Speziell in der Autoindustrie begann man früh mit der Entwicklung von computerunterstützten Verbindungen zwischen dem Design und der Produktion von Autos. Vorreiter waren in Frankreich die Firmen Citroen und Renault. Die Konstruktionen aus dem Design-Studio sollten mit mathematischen Grundlagen gespeichert und möglichst direkt für die Programmierung der Maschinen zur Produktion verwendet werden. Die Namensgebung der Kurven bzw. von Algorithmen ist auch mit dieser Entwicklung verbunden (Casteljau, Bézier). Heute werden Bézier-Kurven - wie oben angeführt - auch in der Computer-Grafik verwendet.

Die Behandlung von Bézier-Kurven kann für den Mathematikunterricht der Schule ein interessantes Thema sein. Schüler lernen dabei eine moderne Anwendung von Mathematik kennen. Der Computer ist ein nützliches bzw. notwendiges Werkzeug für das Berechnen und Zeichnen der Kurven. Auch mit den mathematischen Grundlagen der Kurven kann man sich beschäftigen.

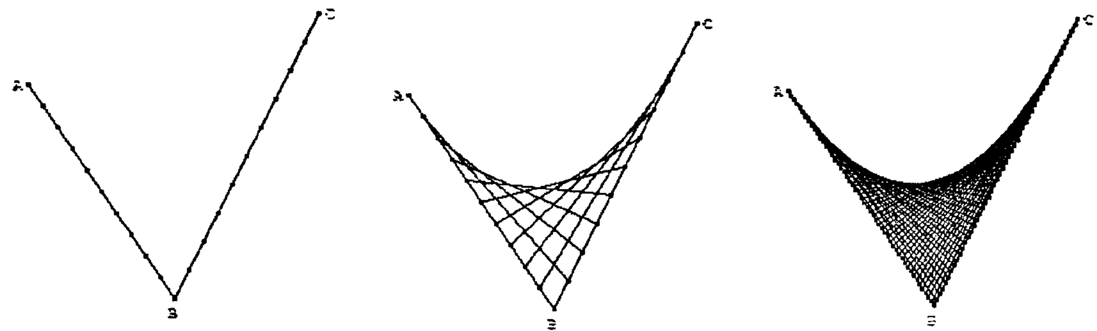
Es gibt allerdings noch keine Tradition der Schulpraxis für diese Kurven. Einige Anregungen für die Vorgangsweise im Unterricht sollten in diesem Artikel enthalten sein. Neben einigen mathematischen Grundlagen der Kurven, wurden auch Beispiele für einen experimentellen Umgang mit den Kurven aufgenommen.

An Software wurde für diesen Beitrag nur übliche Schulsoftware verwendet, speziell das Computeralgebraprogramm *DERIVE* und das Geometrieprogramm *CABRI.*

Eine geometrische Definition von Bézier-Kurven

Bézier-Kurven vom Grad 2

Ausgangspunkt für die folgende Konstruktion sind die beiden Strecken AB und BC. In der mittleren Figur werden die Strecken jeweils in zehn Teile gleicher Länge geteilt und gemäß der Figur verbunden. Mit ein wenig Phantasie kann man sich eine "Kurve" von A nach C vorstellen.



Die Vorstellung einer „Kurve“ zwischen *A* und *C* wird verstärkt, wenn man die beiden Strecken in 50 Teile gleicher Länge teilt.

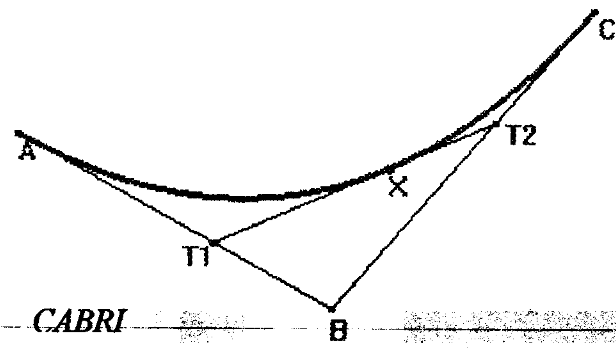
Gemäß der angegebenen Konstruktion kann man Bézier-Kurven vom Grad 2 bzw. vom Grad 3 auf folgende Weise definieren:

Bézier-Kurve vom Grad 2

Gegeben ist das **Bézier-Polygon** ABC bzw. die **Bézier -Punkte** A, B und C.

Der Kurvenpunkt X ist durch die folgenden Proportionen festgelegt:

$\overline{AT_1}:\overline{AB} = \overline{BT_2}:\overline{BC} = \overline{T_1X}:\overline{T_1T_2} = t:1$



Die Variable t ist der **Parameter**. Für jedes $t \in [0;1]$ ergibt sich ein Punkt der Bézier-Kurve, mit $t = 0$ der Punkt A, mit $t = 1$ der Punkt C. Wenn t die Zahlen im Intervall [0;1] durchläuft, so erhält man die gesamte Bézier-Kurve. Wenn sich t von 0 nach 1 verändert, so bewegt sich X auf der Kurve von A nach C.

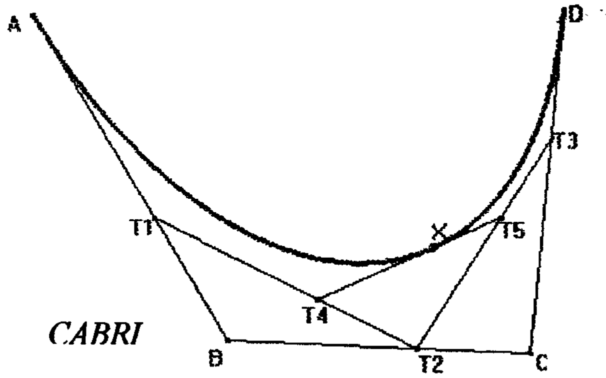
Bézier-Kurven vom Grad 3

Die Definition erfolgt analog zur Bézier-Kurve vom Grad 2.

Bézier-Kurve vom Grad 3

Gegeben ist das **Bézier-Polygon** ABCD bzw. die **Bézier- Punkte** A, B, C und D.

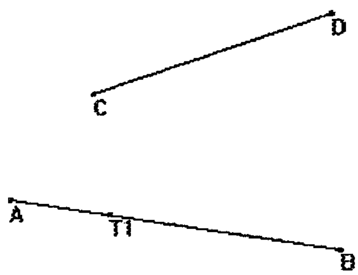
Der Kurvenpunkt X ist durch die folgenden Proportionen festgelegt:



$$\overline{AT_1}:\overline{AB} = \overline{BT_2}:\overline{BC} = \overline{CT_3}:\overline{CD} = \overline{T_1T_4}:\overline{T_1T_2} = \overline{T_2T_5}:\overline{T_2T_3} = \overline{T_4X}:\overline{T_4T_5} = t:1$$

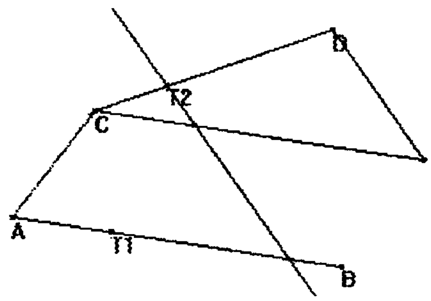
Die obigen Bemerkungen über den Parameter gelten auch für eine Bézier-Kurve vom Grad 3. Wenn sich t von 0 nach 1 verändert, so bewegt sich X auf der Kurve von A nach D.

Konstruktion von Bézier-Kurven mit *CABRI*



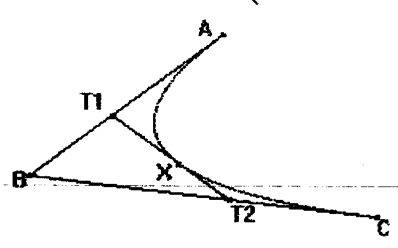
Zunächst legen wir allgemein die Konstruktion der Übertragung eines Teilungspunktes auf eine zweite Strecke fest. Dazu verwenden wir die Strecken AB und CD. (Zu beachten ist, dass die Strecken *CABRI*-intern in der Reihenfolge der Eingabe der Punkte „gerichtet“ sind,)

T_1 ist ein “Punkt auf Objekt” und kann auf der Strecke AB bewegt werden. Dieser Punkt ist unser Teilungspunkt für die Konstruktion der Bézier-Kurve.



Im nächsten Konstruktionsschritt wird die Übertragung von T_1 auf die Strecke CD gezeigt. Wir erhalten den Punkt T_2.

Diese Konstruktion ist der Grundbaustein für die Bildung der Bézier-Kurve. Sie wird als Makro gespeichert. Das Makro kann ausgeführt werden, wenn zwei Strecken (AB und CD) sowie ein Punkt (T_1) auf einer der Strecken gegeben sind.



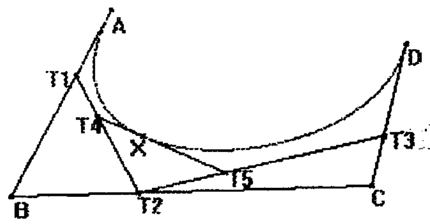
Bei der Erzeugung der Bézier-Kurve selbst geht man von den Strecken AB und BC aus (Eingabe in dieser Reichenfolge). Die Teilung wird mehrmals übertragen, indem man jeweils das Makro anwendet. Zunächst erhält man den Punkt T_2 auf BC und anschließend den Punkt X auf der Strecke T_1T_2, der diese Strecke im selben Teilungsverhältnis teilt.

Anschließend kann man die Kurve als Ortslinie in *CABRI* konstruieren (X abhängig von T_1).

Durch Bewegen der Bézier-Punkte kann die Form der Bézier-Kurve geändert werden.

Auf analoge Weise ist es möglich eine Bézier-Kurve 3. Grades zu erzeugen.

Für praktische Anwendungen benötigt man normalerweise keine Bézier-Kurven höheren Grades. Kompliziertere Figuren setzt man meist aus mehreren Bézier-Kurven zusammen.



Algebraische Darstellung von Bézier-Kurven

Darstellung einer Bézier-Kurve vom Grad 2:
Aus den Punkten A, B, C und dem Parameter kann man auf folgende Weise den Kurvenpunkt X berechnen:

$$T_1 = A + t \cdot \overrightarrow{AB} = A + t \cdot (B - A) = (1-t) \cdot A + t \cdot B$$
$$T_2 = (1-t) \cdot B + t \cdot C$$
$$X(t) = (1-t) \cdot T_1 + t \cdot T_2$$

$$X(t) = (1-t) \cdot [(1-t) \cdot A + t \cdot B] + t \cdot [(1-t) \cdot B + t \cdot C]$$
$$X(t) = (1-t)^2 \cdot A + 2(1-t)t \cdot B + t^2 \cdot C$$

Auf analoge Weise ergibt sich mit einer umfangreicheren Rechnung der Punkt X für eine Bézier-Kurve dritten Grades:

$$X(t) = (1-t)^3 \cdot A + 3(1-t)^2 t \cdot B + 3(1-t) \cdot t^2 \cdot C + t^3 \cdot D$$

(Man erkennt leicht das Muster für eine Erweiterung auf eine Kurve n-ten Grades.)

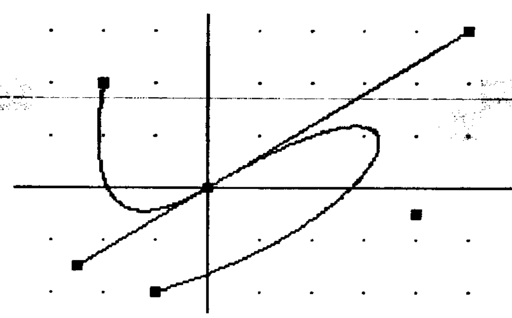
Tangenten im Anfangs- bzw. Endpunkt einer Bézier-Kurve

Wenn die Berechnung der Ableitung einer parametrischen Kurve bekannt ist, dann können Tangenten bzw. die Tangentenrichtung an eine Bézier-Kurve berechnet werden.

$$X(t) = (1-t)^2 A + 2\,(1-t)\,t\,B + t^2 C \;\rightarrow\; X'(t) = -2\,(1-t)\,A \;+ 2\,(1-2t)\,B + 2t\,C$$
$$X'(0) = -2A + 2B = 2\,(B-A) = \overrightarrow{AB}$$
$$X'(1) = -2B + 2C = 2\,(C-B) = \overrightarrow{BC}$$

Daraus erkennt man, dass die benachbarten ersten beiden Punkte des Bézier-Polygons die Tangentenrichtung angeben.

Diese Tangenteneigenschaft kann für die Verbindung von zwei Bézier-Kurven ohne „Knickstelle“ verwendet werden wie die Figur zeigt. Am Anfangs- bzw. Endpunkt stoßen die Kurven zusammen. Die jeweils benachbarten Bézier-Punkte liegen auf einer Geraden.



Bézier-Kurven mit *DERIVE*

Man Hilfe der Funktionsaufrufe **bez2** und **bez3** können Bézier-Kurven 2. und 3. Grades dargestellt werden. Beim Zeichnen der Kurven in *DERIVE* wählt man für den Parameter t den Bereich [0;1].

$$\text{bez2}(a\_, b\_, c\_, t) := (1-t)^2 \cdot a\_ + 2\cdot(1-t)\cdot t\cdot b\_ + t^2\cdot c\_$$

$$[p1 := [-5, 3], p2 := [-2, -5], p3 := [6, 8]]$$

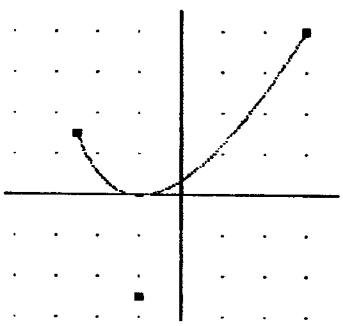
$$\text{bez2}(p1, p2, p3) = \left[5\cdot t^2 + 6\cdot t - 5, 21\cdot t^2 - 16\cdot t + 3\right]$$

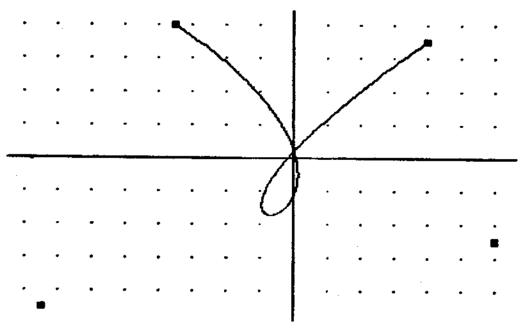
$$\text{bez3}(a\_, b\_, c\_, d\_, t) := (1-t)^3\cdot a\_ + 3\cdot(1-t)^2\cdot t\cdot b\_ + 3\cdot(1-t)\cdot t^2\cdot c\_ + t^3\cdot d\_$$

$$[p1 := [8, 7], p2 := [-15, -9], p3 := [12, -5], p4 := [-7, 8]]$$

$$\text{bez3}(p1, p2, p3, p4) = \left[-96\cdot t^3 + 150\cdot t^2 - 69\cdot t + 8, -11\cdot t^3 + 60\cdot t^2 - 48\cdot t + 7\right]$$

Am folgenden rechten Bild erkennt man, dass man mit Bézier-Kurven 3. Grades auch Schleifen bilden kann.





Modellieren von Figuren mit Bézier-Kurven

Darstellung des Buchstaben "D"

Wir betrachten nun zwei Beispiele zur Darstellung des Buchstaben "D" mit *DERIVE*, mit zwei bzw. drei Bézier-Kurven. Dabei benötigt man jeweils auch eine gerade Linie. Dafür eignet sich der Funktionsaufruf **bez1** (Bézier-Kurve 1. Grades).

d1: "D" dargestellt mit zwei Bézier-Kurven:

$$\text{bez1}(a\_, b\_, t) := (1-t)\cdot a\_ + t\cdot b\_$$

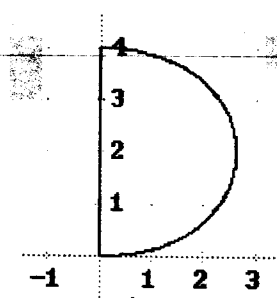
$$d1 := [\text{bez3}([0, 0], [3.5, 0], [3.5, 4], [0, 4]), \text{bez1}([0, 0], [0, 4])]$$

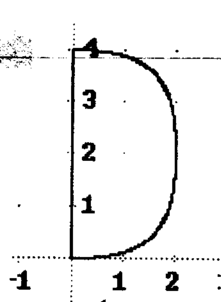
d2: "D" dargestellt mit drei Bézier-Kurven:

$$d2 := [\text{bez3}([0, 0], [1.5, 0], [2, 0.5], [2, 2]), \text{bez3}([0, 4], [1.5, 4], [2, 3.5], [2, 2]), \text{bez1}([0, 0], [0, 4])]$$

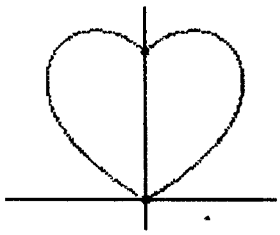
Im Vergleich die beiden Resultate (links d1 und rechts d2).

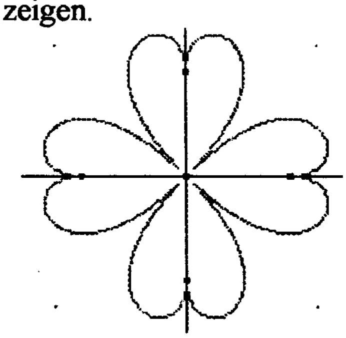
Es gibt nicht nur die „eine" Lösung für die Darstellung eines Buchstaben. Jeder kann sich seine eigene Schriftart bilden.



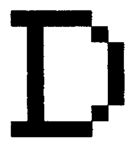


Durch Darstellung von Zeichen bzw. von Figuren sollen Schüler lernen kreativ mit Bézier-Kurven zu modellieren und dabei eigene Ideen zu realisieren. Es bieten sich offene Aufgabenstellungen an, wie die folgenden beiden Beispiele zeigen.

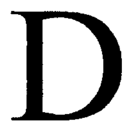




Abbildungen von Bézier-Kurven



Wenn man einen Buchstaben in der Schriftgröße 8 schreibt und mit einem einfachen Grafikprogramm vergrößert, so erhält man die rechts abgebildete Figur.



Besser ist es, die Größe von Buchstaben in der Textverarbeitung selbst zu ändern. Die Buchstaben werden für die gewünschte Größe neu berechnet und behalten ihre Form.

Bézier-Kurven haben dafür günstige Eigenschaften: Um eine Figur zu vergrößern, verkleinern, ... genügt es die Bézier-Punkte entsprechend zu transformieren und die Figur mit den neuen Punkten zeichnen zu lassen.

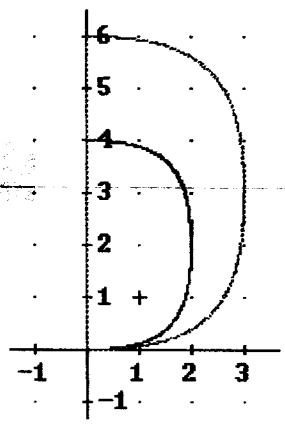
Größenänderung des Buchstaben „D" mit *DERIVE*:

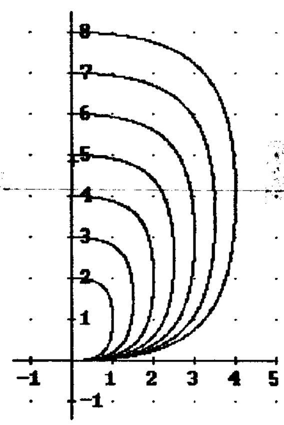
Zur Darstellung des Buchstaben verwenden wir die obigen Funktionsaufrufe d1 und d2. Die Vergrößerung funktioniert mit **stretch**:

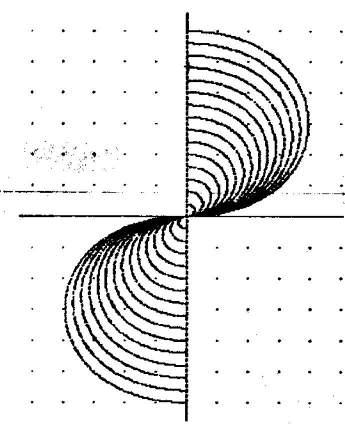
```
stretch(m_, k_) := k_·m_

stretch(d2, 1.5)

VECTOR(stretch(d2, k), k, 0.5, 2, 0.25)

VECTOR(stretch(d1, k), k, -1.5, 1.5, 0.1)
```

Zum Beispiel wird durch stretch(d2, 1.5) jeder Vektor mit 1,5 multipliziert. Wir erhalten eine Streckung mit dem Ursprung als Zentrum. Für Streckungen mit verschiedenen Streckfaktoren verwenden wir die „VECTOR-Anweisung".

Die Resultate der obigen Aufrufe sind in den folgenden drei Abbildungen dargestellt:



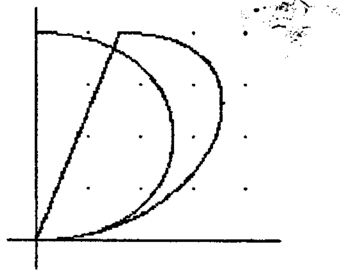




Eine Art "Italics" – (Scherung)

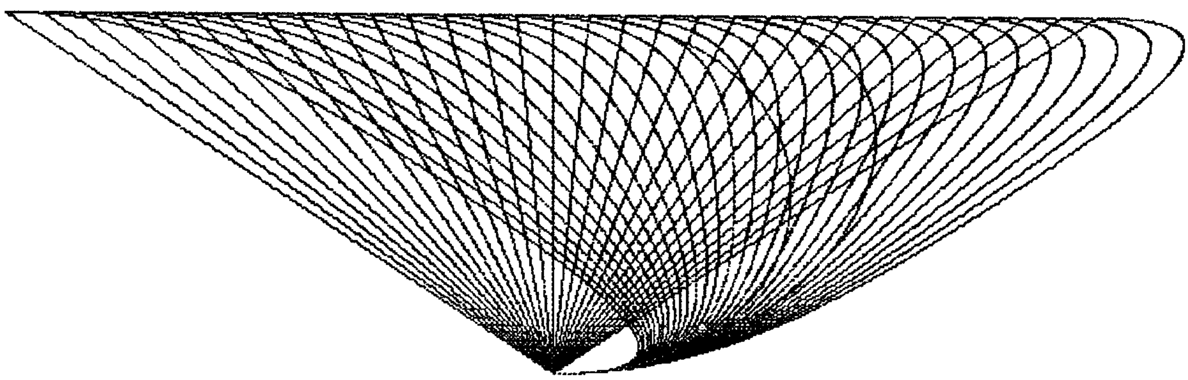
Mit der folgenden *DERIVE*-Anweisung wird die x-Koordinate jedes Punktes proportional zur y-Koordinate verschoben. Dadurch kann die Figur schräg gestellt werden.

```
shear(m_, k_) := VECTOR([v_1 + k_·v_2, v_2], v_, m_)

[d1, shear(d1, 0.4)]
```



Mit „Vector" können wiederum mehrere Figuren mit einem Aufruf dargestellt werden.

```
VECTOR(shear(d2, k), k, -1.5, 1.5, 0.1)
```



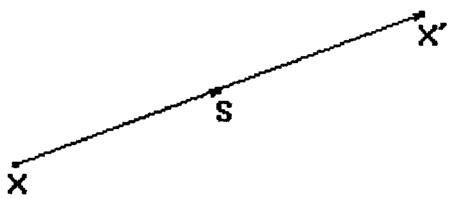
Punktspiegelung

In der Abbildung wird der Punkt X an S gespiegelt. Wir erhalten den Punkt X'.

$$\overline{XS} = \overline{SX'}$$

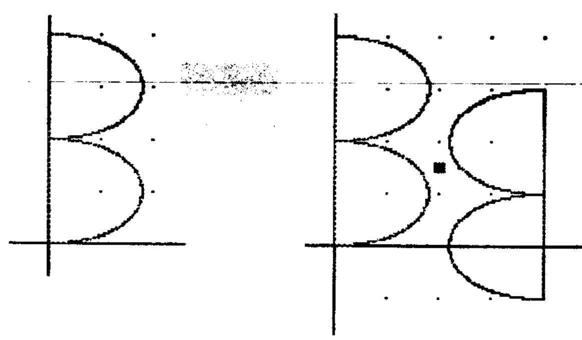
$$S - X = X' - S$$

$$X' = 2 \cdot S - X$$



Die folgende Anweisung ermöglicht uns, Figuren an einem Punkt zu spiegeln. Dabei bedeutet m_ das Objekt, das gespiegelt werden soll (z.B. die Bézier-Kurve) und pt_ der Spiegelungspunkt.

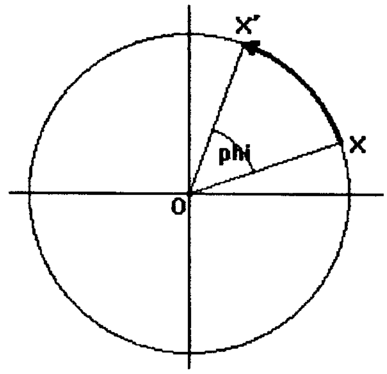
```
reflp(m_, pt_) := VECTOR(2·pt_ - v_, v_, m_)

b1 := [bez3([0, 0], [2.4, 0], [2.4, 2], [0, 2]), bez3([0, 2], [2.4, 2], [2.4, 4],
   [0, 4]), bez1([0, 0], [0, 4])]

reflp(b1, [2, 1.5])
```



Rotation einer Bézier-Kurve

Der Punkt $X=(x,y)$ rotiert mit Zentrum $O=(0,0)$.
Daraus ergibt sich der Punkt $X'=(x',y')$.
Mit den folgenden Ausdrücken kann X' berechnet werden:

$$x' = x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi$$
$$y' = x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi$$

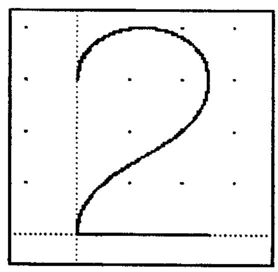


Zur Demonstration der Rotation verwenden wir als Beispiel die Ziffer "2". Diese wird hier aus zwei Bézier-Kurven vom Grad 3 und einer Kurve vom Grad zusammengesetzt 1.

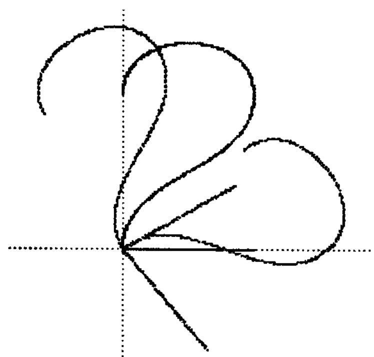
(Dabei ist m_ ist das Objekt und w_ der Winkel der Rotation.)

$$\mathrm{rot}(m\_, w\_) := \mathrm{VECTOR}\left(\left[v\_{_1} \cdot \mathrm{COS}(w\_) - v\_{_2} \cdot \mathrm{SIN}(w\_),\ v\_{_1} \cdot \mathrm{SIN}(w\_) + v\_{_2} \cdot \mathrm{COS}(w\_)\right],\ v\_,\ m\_\right)$$

$$\mathrm{two} := \left[\mathrm{bez3}([0, 0], [0, 1.5], [2.5, 1.5], [2.5, 3]),\ \mathrm{bez3}\left([0, 3], \left[0, \frac{13}{3}\right], \left[2.5, \frac{13}{3}\right], [2.5, 3]\right),\ \mathrm{bez1}([0, 0], [2.5, 0])\right]$$

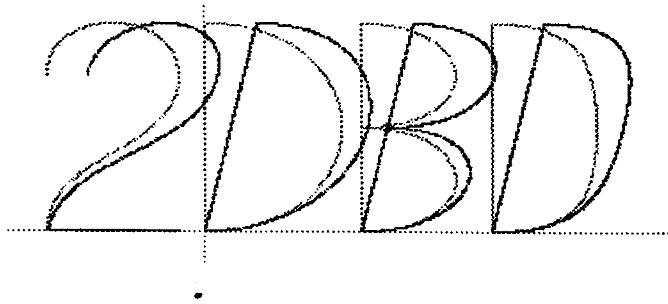


$$\left[\mathrm{rot}\left(\mathrm{two}, \frac{\pi}{6}\right),\ \mathrm{rot}\left(\mathrm{two}, -\frac{5 \cdot \pi}{18}\right)\right]$$



In *DERIVE* ist es weiters möglich, mehrere Buchstaben aneinanderzufügen. Z.B. wird die Zeichenkette „2DBD“ an den festgelegten Stellen dargestellt und anschließend die Darstellung in „Italics“ geändert.

```
shift(m_, s_) := VECTOR(v_ + s_, v_, m_)
text := APPEND(d1, shift(b, [3, 0]), shift(d2, [5.5, 0]), shift(two, [-3, 0]))
shear(text, 0.25)
```



Länge einer Bézier-Kurve

Mit Hilfe der folgenden Methode kann man die Länge einer Bézier-Kurve näherungsweise berechnen. Die Kurve wird in „kleine“ Stücke geteilt und diese werden näherungsweise durch Strecken ersetzt. Dadurch erhalten wir einen Polygonzug. Indem wir die Länge des Polygonzugs ermitteln, erhalten wir einen Näherungswert für die Länge der Kurve.

Als Beispiel berechnen wir die Länge der folgenden Bézier-Kurve vom Grad 3.

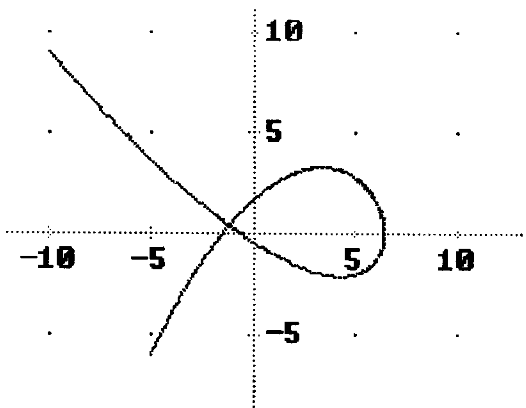
```
cv(t) := bez3([-10, 9], [15, -20], [7, 20], [-5, -6], t)

dist(p1, p2) := √((p2 - p1)·(p2 - p1))

Notation := Decimal

NotationDigits := 10
```

$$\sum_{i=0}^{99} \text{dist}\left(cv\left(\frac{i}{100}\right), cv\left(\frac{i+1}{100}\right)\right)$$

39.80989599

$$\sum_{i=0}^{999} \text{dist}\left(cv\left(\frac{i}{1000}\right), cv\left(\frac{i+1}{1000}\right)\right)$$

39.81310875



Mit Hilfe eines USER-files von *DERIVE* ergibt sich für die Länge:

$$\text{PARA\_ARC\_LENGTH}(cv(t), t, 0, 1) = 3\cdot\sqrt{2}\cdot\int_0^1 \sqrt{9533\cdot t^4 - 20544\cdot t^3 + 16340\cdot t^2 - 5652\cdot t + 733}\,dt$$

$$\text{PARA\_ARC\_LENGTH}(cv(t), t, 0, 1) = 39.81314121$$

Bézier-Kurve 2. Grades als Parabel

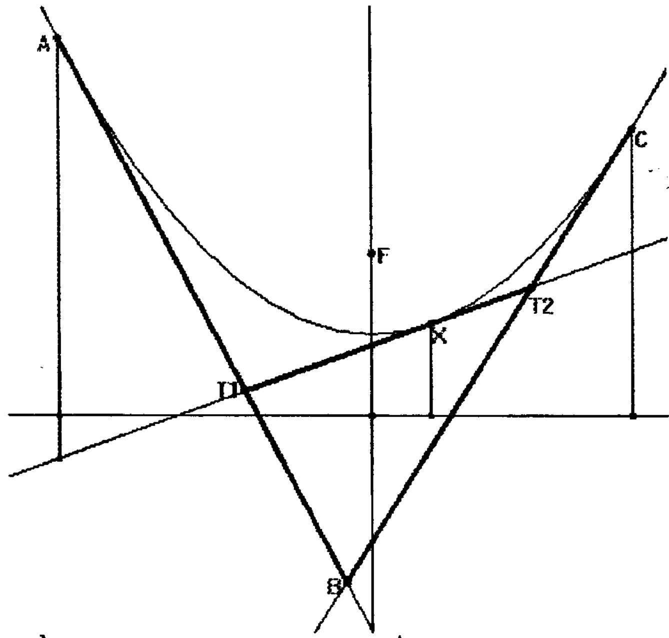
Auf mehrere Arten kann nachgewiesen werden, dass eine Bézier-Kurve 2. Grades eine Parabel ist, z.B. hier elementargeometrisch.

Ausgangspunkt ist eine Parabel, an die in den drei Punkten A, X und C Tangenten gelegt sind.

Zu zeigen ist, dass für die Tangenten mit den Schnittpunkten T_1 und T_2 die Bedingung für eine Bézier-Kurve 2. Grades erfüllt ist:

$$\overline{AT_1} : \overline{T_1B} = \overline{T_1X} : \overline{XT_2} =$$

$$= \overline{BT_2} : \overline{T_2C}$$



In der folgenden Abbildung erkennt man die Symmetrieeigenschaften der Tangenten AB und BC.

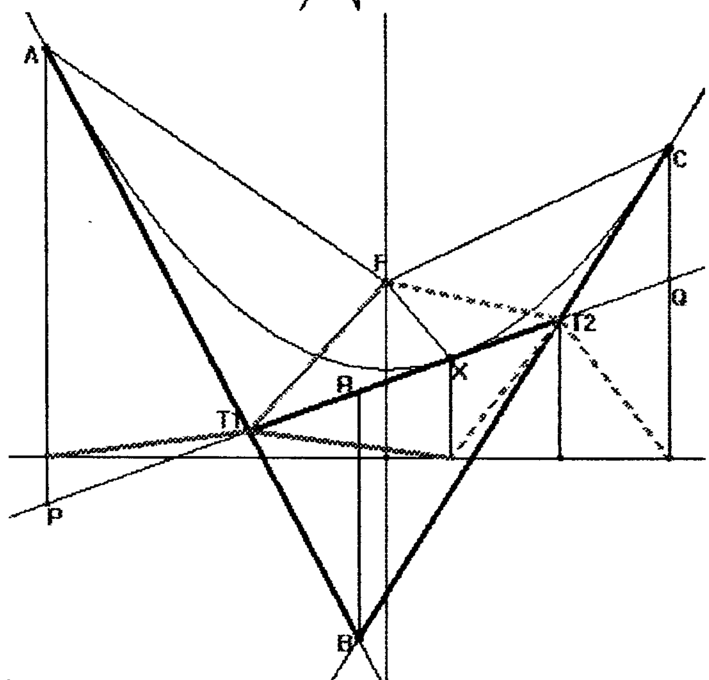
Nach der elementargeometrischen Definition einer Parabel sind die drei von T_2 ausgehenden strichlierten Strecken gleich lang, ebenfalls die analog von T_1 ausgehenden drei Linien.

Damit ergibt sich:

$$\overline{PT_1} = \overline{T_1X} \text{ bzw. } \overline{XT_2} = \overline{T_2Q}$$

Nach dem Strahlensatz gilt weiters:

$$\overline{AT_1} : \overline{T_1B} = \overline{PT_1} : \overline{T_1R}$$



Zusätzlich sind jetzt noch die drei gleich langen von B ausgehenden Strecken eingezeichnet.

Daraus ergibt sich $\overline{PR} = \overline{RQ}$

Mit den Bezeichnungen

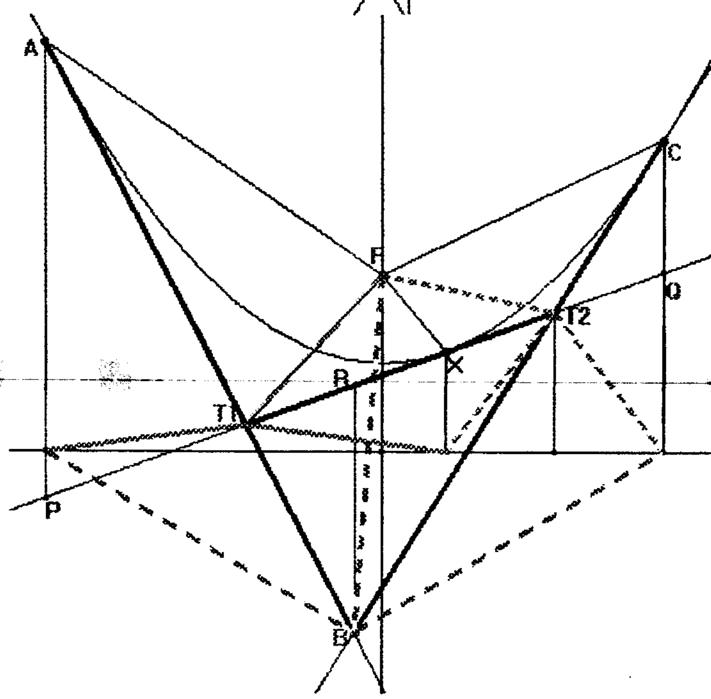
$\overline{PT_1} = \overline{T_1X} = a$, $\overline{XT_2} = \overline{T_2Q} = b$ und

$\overline{PR} = \overline{RQ} = c$

erhalten wir $\quad 2a + 2b = 2c$

$$a + b = c$$

und daraus $\overline{XT_2} = \overline{T_1R}$.



Damit ergibt sich die gewünschte Proportion

$$\overline{AT_1} : \overline{T_1B} = \overline{PT_1} : \overline{T_1R} = \overline{T_1X} : \overline{XT_2}$$

Das andere Verhältnis $\overline{T_1X} : \overline{XT_2} = \overline{BT_2} : \overline{T_2C}$ kann man auf analoge Weise berechnen.

Zusammenfassung

Einige Gründe für die Behandlung von Bézier-Kurven im Mathematikunterricht:

- Erweiterung des Themas "Kurven" im Mathematikunterricht. Beispielsweise sind im neuen Lehrplan der Oberstufe AHS Parameterkurven verankert.
- Ein interessantes Beispiel für Anwendungen in der Mathematik. Diese Kurven kommen von der Computergrafik bis zum Design häufig vor und deren Grundlagen könnten für Schüler interessant sein.
- Ein Gebiet, in dem die Computeranwendung wesentlich ist und nicht nur ein Hilfsmittel darstellt.

Was sollen Schüler mit Bézier-Kurven lernen?

Besonders wichtig erscheint anfangs das (praktische) Arbeiten an den Phänomenen dieser Kurven, Darstellung von Figuren (Buchstaben) und die verschiedenen Darstellungsformen der Kurven. Erst dann scheint es sinnvoll, sich mit Grundlagen der Kurven auseinanderzusetzen Auch Fähigkeiten im Umgang mit dem Computer (Geometrie-Software, CAS) können dabei gefördert werden.

Literatur

Bär G.; Geometrie, Einführung in die analytische und konstruktive Geometrie; B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, Leipzig 1996

Chambers P., Rockwood A.; Interactive Curves and Surfaces; Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1996

Grabinger B.; Wie Microsoft Kurven biegt: Mathematik mit Paintbrush; Praxis der Mathematik 1/41; 1999

Pottmann H., Wallner J.; Computational Line Geometry; Springer-Verlag Berlin, Heidelberg New York; 2001

Scheu G., An Approach to the Bézier Curves with DERIVE, DERIVE Newsletter #19, 1995

Schoberleitner F. in Schlöglhofer F., Schoberleitner F.; Ideen zur Geometrie, Skriptum für die Lehrerfortbildung PI-OÖ, 2002

Schlöglhofer F., Bézier Curves in School, DERIVE Newsletters #52, 2003